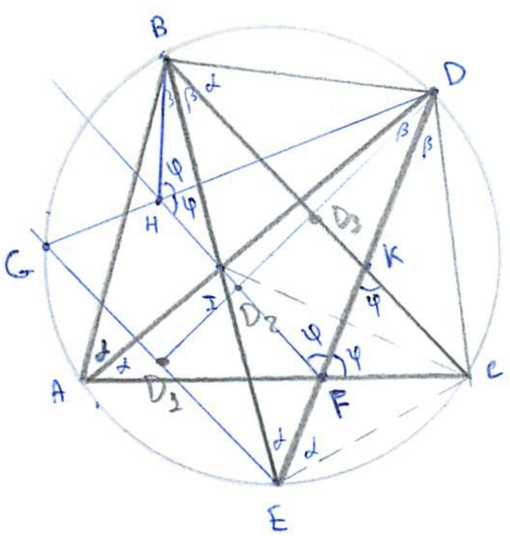
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8	25.04.2015/ მათ/III/ 616

ამოცანა № 1 გვერდი № 1



$\beta=\angle ABI=\angle CBI=\angle ADE=\angle \underline{CDE}=\angle DEC$

$\alpha=\angle BAI=\angle CAI=\angle BED=\angle \underline{CBD}$

რადგან I არის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი.

$\angle BCA=180^\circ-2\alpha-2\beta=\angle BDA$

$\angle DKB=180^\circ-\beta-\alpha-(\angle BDA)=$

$=180^\circ-\beta-\alpha-180^\circ+2\alpha+2\beta=\alpha+\beta$

$\alpha+\beta\equiv\varphi$

$\angle BKD=\angle CKF=\varphi$

AD ბისექტრისაა $\Rightarrow \overset{\smile}{BD}=\overset{\smile}{CD}\Rightarrow BD=CD\Rightarrow \angle DBC=\angle DCB=\alpha$

$\angle DCA=\alpha+\angle BCA=\alpha+180^\circ-2\alpha-2\beta$

$\angle DFC=180^\circ-\beta-\angle DCA=180^\circ-\beta-180^\circ+\alpha+2\beta=\alpha+\beta=\varphi$

$\angle DFC=\angle FKC=\varphi\Rightarrow CK=FC$ $\quad\angle BID=\alpha+\beta$ (ΔABI-ს გარე კუთხე)

$\angle DBI=\angle DBC+\angle CBE=\alpha+\beta\Rightarrow \Delta BDI$ ტოლფერდაა $\Rightarrow BD=DI=DC$

ანალოგიურად $EI=EC$ (რადგან BE ბისექტრისაა).

ΔIDE და ΔCDE-ში საერთო ტოლია $\Rightarrow \Delta IDE\sim\Delta CDE$ ანუ, შესაბამისი გვერდები ტოლია $ID=CD$ და $IE=CE\Rightarrow \Delta IDE=\Delta CDE$. CI არის ΔCKF-ის ბისექტრისა $\Rightarrow$ არის სიმაღლეც. $IC\perp DE$.

4

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

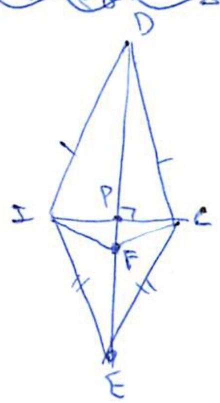
მაგიდა № 8

25.04.2015/ მათ/III/ 616

ამოცანა № 1

გვერდი № 2

~~[illegible] $\triangle IDE = \triangle CDE$~~



$$\left.\begin{array}{l} IC \perp DE \\ IP = PC \\ PF = FP \end{array}\right) \Rightarrow \triangle IPF = \triangle CPF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DFC = \angle \underline{DFI} = \varphi$$

$$\angle IFA = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - 2(\alpha+\beta) = \angle BCA \Rightarrow BC \parallel IF \parallel GE$$

$$\left.\begin{array}{l} \breve{EC} = \breve{BG} \\ \breve{BD} = \breve{DC} \end{array}\right) \Rightarrow \breve{ED} = \breve{DG} \Rightarrow ED = DG$$

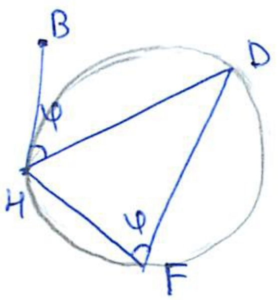
$HF \parallel GE$, $\triangle DHF \sim \triangle DGE \Rightarrow DH = DF \Rightarrow \angle DFH = \angle DHF = \varphi$

$\square BCFH$ ტრაპეციაა. $\triangle DGE$-ში D-დან GE-ზე დავუშვათ მედიანა DD_1.
$DD_1 \perp GE$. BC-ს კვეთს D_3-ში, HF-ს D_2-ში.

$DD_1 \perp BC \Rightarrow BD_3 = CD_3$ ([illegible]). $HD_2 = FD_2$, ამიტომ

$\square BCFH$ ტრაპეცია ტოლფერდაა $\Rightarrow \angle CFH = \angle BHF = 2\varphi$

$\angle BHD = \varphi$



$\frac{\breve{HD}}{2} = \varphi$

$\frac{\breve{HD}}{2}$-ის კუთხე HD მონაკვეთსა და მხებს შორის $\Rightarrow$ BH მხებია

რ.დ.გ.

6

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8	25.04.2015/ მათ/III/ 626

ამოცანა № 2 გვერდი № 1

$0<a<b<1$ → ანუ არსებობს ისეთი x, რომ $a<x<b$

$a_0=a$

$a_1=f(a_0)$

$a_2=f(a_1)$

...

$a_n=f(a_{n-1})$

იგივე b-ზე.

თუ რომელიმე a_k არის $\frac{1}{2}$-ზე ნაკლები ($0<a_k<\frac{1}{2}$), მისი მომდევნო a_{k+1} მიიღება $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}$

თუ $\frac{1}{2}\le a_k<1$, მაშინ $a_{k+1}=a_k^2$

ამასთან, თუ რომელიმე a_p მიღებულია მის წინა a_{p-1} რიცხვზე $\frac{1}{2}$-ის დამატებით ანუ $a_p=a_{p-1}+\frac{1}{2}$ მაშინ $a_{p-1}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$ და $a_{p+1}=\left(a_{p-1}+\frac{1}{2}\right)^2$

ანუ $\frac{1}{2}$-ის დამატების შემდეგ აუცილებლად ყოველთვის აკვადრატება. აკვადრატებებს შორის ან აკვადრატება ან $\frac{1}{2}$-ის დამატება.

ე.ი. $(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})<0$ ე.ი. ამ სხვაობებს სხვადასხვა ნიშნები აქვთ. $a_n-a_{n-1}<0$ როცა

$a_n=(a_{n-1})^2$ რადგან $a\in(0;1) \Rightarrow a^2<a$;

$a_n-a_{n-1}>0$ როცა $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}$. სხვა ვარიანტი არ გვაქვს.

ანალოგიურად b-ზე. ე.ი. უნდა მოიძებნებოდეს ისეთი n, რომ a_n და b_n-დან ერთი ერთი მიღებული იყოს მიმდევრობაში მის წინა რიცხვზე $\frac{1}{2}$-ის დამატებით, მეორე კი მიღებული იყოს წინა რიცხვის აკვადრატებით.

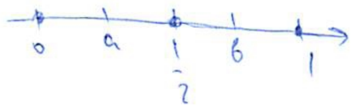
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8	25.04.2015/ მათ/III/ 616
ამოცანა № 2	გვერდი № 2

ეს ნიშნავს, რომ a_{r-1} და b_{r-1}-დან ერთ-ერთი მეტია $\frac{1}{2}$-ზე, მეორე ნაკლებია $\frac{1}{2}$-ზე.



$(a<b)$

a და b-ზე ვიხილოთ ბოლო (r-1)-ე ნაბიჯი და ისინი $\frac{1}{2}$-ის სხვადასხვა მხარეს მოხვდნენ. მანამდე ისინი ან ორივე $\frac{1}{2}$-ის ერთ და იმავე მხარეს იყვნენ. რა შემთხვევაში ხდება სიტუაცია მათი "დაშორება" ანუ თუ როგორ $\frac{1}{2}$-ის ჩვენება?

თუ $a_{n-1} = a_{n-2}+\frac{1}{2}$ მაშინ $b_{n-1} = b_{n-2}+\frac{1}{2}$ სადაც მანამდე არ "დაშორებულან". ანუ, a_{n-2} და b_{n-2}-ს $\frac{1}{2}$-ის ერთ და იმავე მხარეს არიან. მაშინ a_{r-1} და b_{r-1}-ც ასევე იქნებიან.

თუ $a_{r-1} = (a_{r-2})^2$ მაშინ $b_{r-1} = (b_{r-2})^2$ იგივე მიზეზის გამო. შეუძლია არ ყოფილა a_{r-1} და b_{r-1} ერთიდაიმავე სხვადასხვა მხარეს აღმოჩნდნენ. ე.ი. a_{r-1} და b_{r-1}-ის "დაშორება" ხდება აკვადრატების ოპერაციის დროს.

$a_{r-1} < \frac{1}{2} \Rightarrow (a_{r-2})^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow a_{r-2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

ანალოგიურად $b_{r-2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8	25.04.2015/ მათ/III/ 616

ამოცანა № 2 გვერდი № 3

ვაჩვენოთ a და b-ები არ მოიძებნება ისე n, რომ [illegible] $(n-2)$-ჯერ ოპერაციის შემდეგ ისინი იყვნენ $\frac{1}{\sqrt2}$-ის [illegible] და იგივე მხარეს. ხოლო ~~(n-2)~~ [illegible] [illegible] – სხვადასხვა.

თუ თავიდან a_0 და b_0 იყვნენ $\frac{1}{2}$-ის მარცხნივ$^{(a)}$ და მარჯვნივ$^{(b)}$

$0 < a_0 < \frac{1}{2}$ $\quad a_1 = a_0 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ $\quad a_1 > a_0$

$1 > b_0 > \frac{1}{2}$ $\quad b_1 = (b_0)^2 < \frac{1}{2}$ $\quad b_1 < b_0$

$\Downarrow$

თუ $n=1$ ავიღ $\quad (a_1-a_0)(b_1-b_0) < 0$ მოიძებნება ისე n $n=1$

თუ: a და b $\frac{1}{2}$-ის ~~სხვადასხვა~~ ერთ მხარესაა......

...

~~თუ $0 < a_k < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$~~

~~$a_{k+1} < \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$~~

$a_{k+2} =$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 8

25.04.2015/ მათ/III/ 616

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3 \qquad (x,y)\in\mathbb{Z}$

თუ $x=y$

$14x^2-13x^2=1$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

ამონახსნები $(1;1),(-1;-1)$

ასევე, თუ $x=1$ და $y=-1$

$\cancel{7x^2+13}$ $7+13+7=3^3$

$27=27$

ამონახსნები $(1;-1),(-1;1)$

$(|x-y|+1)^3>0$ ყოველთვის

$7x^2+7y^2>13xy$

ზოგადობის ავღოთ $x>y$

$7x^2-13xy+7y^2=(x-y+1)^3$

$(4x-4y)^2-(3x-3y)^2+xy=(x-y+1)^3$

$7(x-y)^2+xy=(x-y)^3-2(x-y)^2+2(x-y)-1$ რომ გავშალოთ, მივიღებთ:

$x^3-x^2(2y+9)+x(2y^2+17y+2)-(y^3+9y^2+2y)-1=0$

7